算数・数学科実践提案

― 冨倉亮　岩﨑英之　兼松明　田中雄也　平尾龍平 ―

１　これまでの算数・数学科の取組

算数・数学科では、これまでの研究をベースに、学習指導要領に定められている三つの資質・能力のうち、特に「思考力・判断力・表現力等」の育成に重点を置くことにした。

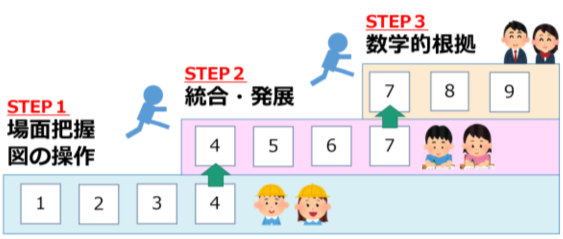
これは、本校の児童生徒の実態として、算数・数学的な用語を正しく使って自分の考えを表現することへの弱さや、根拠が曖昧で不十分な考えでも満足してしまっている姿が見られるためである。また、不確かな考えを聞いたとき、その考えを鵜呑みにしてしまう姿がある。そこで私たちは、学習過程の一つとして「論証」を取り入れることにした。ここでいう論証は以下のように定めている。

> 既に認められた事柄や定義を根拠として、「命題が真であることを演繹的推論によって示すこと（Ⅱ部・Ⅲ部）」「数学的表現を用いて、問いに対する判断をすること（Ⅱ部・Ⅰ部）」

この論証を授業に取り入れることによって、命題が真であるかどうかを判断するために、既習事項を根拠にしながら、数学的推論をすることができ、それを意図的・計画的に行うことで資質・能力の育成につながると考えた。このような論証を軸とした活動をするために、以下の内容を重点に置いた。

- 数学的内容の系統性を生かし、児童生徒の学びの連続を意識したカリキュラム編成
- 統合的・発展的な考察を促進させる教材開発

さらに、９年間を通して論証を行っていくために、認知発達に基づいて段階的なテーマを、次の図のような三つの STEP を設定した。



ここでいう STEP１は〔場面把握・図の操作〕を中心に据え、第１～４学年を対象とした。さらに、STEP２を〔統合・発展〕を中心に据え、第４～７学年を対象とした。最後に、STEP３を〔数学的根拠〕を中心に据え、第７～９学年を対象とした。この図において、STEP２は STEP１を、STEP３は STEP１と２をそれぞれ土台として積み上げ、９ 年間かけて資質・能力を段階的に育んでいきたいと考えた。特に、第 4 学年では STEP１から STEP２への接続、第 7 学年では STEP２から STEP３への接続を踏まえ、両方の内容を意図的に扱うようにした。

２　全校研究における自己実現に向かう資質・能力との関わり

全校研究における自己実現に向かう三つの資質・能力を、算数・数学科の授業で発揮した姿として次のように整理した。その結果、全校研究と全く切り離されたものではないと捉えることができ、むしろ「論証」は全校研究の資質・能力の育成を促進させるための一助になると考える。

【問題解決力】
- 自ら問いや命題を見いだすことができる姿
- 既習内容を根拠に、筋道立てて考えたり、自分の考えを修正・強化したりすることができる姿
- 一旦解決された問題やその解決を振り返り、問題の条件や仮定を見直したり、共通する性質を見出したり、概念を一般化したり拡張したりする姿

【関係構築力】
- 互いに数学的な表現を用いて筋道立てて伝え合う姿
- 多様な考えを認め合い比較することで、共通点や相違点を見付け、新たな考えを創造する姿
- 批判的な思考を働かせながら、考えの脆弱性について指摘したり、理解できるまで問い返したりできる姿

【貢献する人間性】
- 算数・数学を日常生活や他教科等の学習に積極的に生かそうとする姿
- 算数・数学を学ぶ過程で、数学的な知識及び技能を確実に用いられるようになることや、事柄を的確に捉えられるようになることなど、自己の成長を実感できる姿

３　自己実現に向かう資質・能力にかかわる手立て

（1）問題解決力について

○　発展性や柔軟性を踏まえた教材の開発

児童生徒が問題の条件を柔軟に変えたり、思考の観点を変えたりできるような発展性を踏まえた教材を開発する。例えば、第８学年の連立方程式の単元章末に「さっさ立て」を題材とした次のような問題を設定した。

①碁石を 30 個と中身が見えない箱 A、B を用意する。
②解答者は後ろを向き、出題者は 30 個の碁石を、「さあ」と声を出しながら 2 つの箱のどちらかに入れていく。このとき、A の箱に入れるのは声 1 回につき 2 個、B の箱に入れるのは声 1 回につき 3 個と決めておく。
③碁石は余らないように、すべて分け入れる。
④解答者は、声の回数から、A の箱と B の箱に碁石がそれぞれ何個入っているかをあてる。

そして、問題解決後、「さっさ立て」の攻略法として、次のような命題を生徒に提示した。

声の回数を 3 倍した数から最初の碁石の数 30 個をひき、その差を 2 倍すれば、A の箱の碁石の個数になる。

この命題が真であることを示す活動を仕組むことで、声の回数のすべての場合を洗い出して完全帰納法で示したり、声の回数を文字において演繹的推論によって示したりするなど、生徒の多様な考えを引き出すことができた。さらに、「碁石の総数を一般化してもこの命題は成り立つのか。」「掛け声に対する碁石の入れる個数を変えてもこの命題は成り立つか。」など、生徒が条件を柔軟に変えながら考察範囲を拡げて探究することができ、これは問題解決力の育成につながると考える。

○　課題解決後におけるさらに追究できそうなことの見通しをもつ場の設定

生徒に「解決後さらに追究できそうなことはないか。」と問うことで、教材に内在する発展できる要素を生徒自身に見いださせる場を設定する。その結果、一旦解決された問題を、見通しの場で得られた視点から振り返り、さらに概念の一般化を図りながら考察するなどの姿が期待できる。これは問題解決力を発揮した姿であると考える。

これらは、「問題を発見する」ことや「批判的思考」、「自分のアプローチを柔軟に変えていくこと」などの育成につながると考える。

（2）関係構築力について

○　「問い」や「命題」を提示し、考えを揺さぶる場の設定

これは、問題提示後や論証した後に架空の人物の考えを「問い」として提示することが挙げられる。例えば、5 年生の小数のわり算の単元では、「96÷2.4　の計算の仕方」を単位小数や単位量あたりの大きさをもとに考察した後、「96÷2.4=96×5÷12 という計算の仕方は正しいか。」というような問いを提示することである。この問いは、児童にとっては正しいかどうか判断しづらく、考えを揺さぶられる。そこで、それぞれの立場で互いの考えを批判的思考を働かせながら、考えの脆弱性について指摘したり、理解できるまで問い返したりすることで関係構築力が育まれる。これらのことは、「寄り添う」ことや「共に向かう」ことなどにつながると考える。

（3）貢献する人間性について

○　学んだことだけでなく、自己の解決結果の過程の省察を促し、自己の学び方について認知できる場の設定

授業の終末に、仲間との関わりにおける自己の学び方を省察する時間を設ける。その結果、自己の学びの変容の決め手になった仲間の考えの価値に気付くことができる。また、その中で自分が分かったことやできるようになったことなども明らかになり、自己の成長を実感することができる。これらのことは、「自分を認める」ことや「相手や社会への敬意」などにつながると考える。

３　単元の指導計画

学年	第９学年	単元名	相似と比（全２１時間）

単元で育む資質・能力
・平面図形の相似の意味及び三角形の相似条件などについて理解し、図形の性質や相似などの関係を、記号を使って表すことができる。また、相似な図形の性質を使って、線分の長さや角の大きさなどを求めることができるようにする。 ・三角形の相似条件などを基にして図形の基本的な性質について論理的に確かめることができるようにする。また、平行線と線分の比についての性質を見いだし、それらを確かめることができるようにする。 ・相似な図形のよさを実感して粘り強く考え、図形の相似について学んだことを生活や学習に生かそうとしたり、相似な図形を利用した問題解決の過程をふり返って評価・改善しようとしたりする態度を養う。

時	主な学習活動とねらい	自己実現に向かう資質・能力を発揮している姿
①	◎１点 O を定めて、四角形 ABCD を２倍にした図形 A'B'C'D'をかき、その図形が拡大図と言えるかどうかを考える活動を通して、二つの図形の対応する辺や角に着目することで拡大図であることを判断できることに気付き、拡大図であることを判断できる。また、相似の定義について理解することができる。 ・拡大図と縮図の関係になっているかどうかを明らかにするには、図形のどの構成要素を調べればよいのかを考える。 ・その他、さらに言えそうな性質はないか帰納的に調べることを通して、対応する線分の比と、点 O から対応する２点までの距離の比が等しいことを明らかにする。	・もとの図形と拡大図の対応する辺や角を調べることを通して、「形が同じ」ということを、「相似」という一般的な概念で捉え直している姿。（問題解決力）
②	◎２つの図形が相似であることの意味を知り、相似な図形の性質を定義を基にして説明することができる。また、相似比の意味を理解し、相似比を利用して辺の長さを求めることができる。 ・相似の定義を基に、相似であることの意味と、相似な図形の性質が成り立つ理由について説明する。 ・相似な図形の性質を基に辺の長さを求める。	・もとの図形と拡大または縮小された図形との間に特別な位置関係がなくても、「形が同じ」といえる理由を相似の定義を基に、筋道立てて考えている姿。（問題解決力）
③	◎定点の位置と対応する点をとる方向を変えて拡大あるいは縮小した図形をかき、それらの図形が相似の位置にあるかどうかを判断する活動を通して、相似の位置の定義を理解することができる。 ・相似の中心が辺上や図形の内部など、様々な位置にある場合について拡大図をかく。 ・どの場合でも相似の位置にあると言えるか考え、意見を交流する。	・定点 O から対応する点までの距離の比を調べることを通して、相似の位置は定点 O の位置に依存しないことを見いだしている姿。（問題解決力）

④	◎相似な三角形の相似条件が成り立つことを証明することを通して、三角形の相似条件は、より少ない条件で相似を示すための条件であることに気付き、三角形の合同条件をもとに三角形の相似条件が正しいことを説明することができる。 ・三角形の相似条件が成り立つならば、二つの三角形は相似であると言い切れることを相似の定義に基づいて説明し合う。	・点 O を中心として拡大した図形と合同であることを根拠に、三角形の相似条件が成り立つことを筋道立てて伝え合う姿。 （関係構築力）
⑤	◎図形の構成要素に着目して、二つの相似な三角形を見いだし、どの三角形の相似条件を満たしているかを判断し、証明することができる。 ・二つの三角形が相似であることを証明する。 ・相似であることを証明するには、図形のどの構成要素に着目すればよいか考える。	・自分の証明が正しいかどうか振り返り、論理的に解決できているか考察する姿。 ・二つの三角形が相似であることを数学的な表現を用いて筋道立てて伝え合う姿。（問題解決力）
⑥	◎線分の長さの比について帰納的に考察することを通して、三角形の 1 辺に平行な直線を引いたときにできる線分の比の性質を見いだし、その性質が成り立つことを三角形の相似条件を利用し証明することができる。 ・三角形の 1 辺に平行な直線を引いたときにできる線分の比について帰納的に考察し、どのような性質が成り立ちそうかを考える。 ・見いだした性質が成り立つことを証明する。	・帰納的に追究するなかで見いだした図形の性質から、命題を作り出す姿。 ・線分の比が等しいことを数学的な表現を用いて筋道立てて伝え合う姿。（問題解決力）
⑦ 本 時	◎三角形と比の定理②の証明について、どんな補助線を引けばよいかを考える活動を通して、相似な三角形を作るだけでなく、結論を見通しながら補助線を引くことが大事であることに気付き、証明の進め方について考察することができる。 ・見いだした図形の性質が成り立つことを証明するために、どのような補助線を引けばよいかを考える。 ・その補助線を引いた理由について意見を交流する。 ・補助線を引くことのよさを共有し、線分の比が等しいことを証明する方法についてまとめる。	・自分の証明を振り返り、補助線を引いた目的や、それによってどのようなよさがあったのかを再考し、論理的に解決できているか考察する姿。 ・補助線を引くことの目的やよさについて、仲間との交流を通してさらに理解が深まったことを実感しその内容を記述している姿。 （問題解決力）
⑧	◎三角形と比の定理の逆を証明するには、平行線であるための条件や平行四辺形であるための条件が言えればよいことに気付き、三角形の相似条件を利用して証明することができる。 ・三角形と比の定理の逆を証明するための見通しについて話し合う。 ・三角形と比の定理の逆を証明する。 ・AD：AB=DE：BC ならば DE//BC が成り立たない理由について考える。	・三角形と比の定理について、さらにどのようなことを考えていけそうか見通しをもち、三角形と比の定理の逆について、命題を見いだしている姿。 ・自分の証明を振り返り、補助線を引いた目的や、根拠が曖昧なところがないかを再考し、論理的に解決できているか考察する姿。 （問題解決力）

⑨	◎平行線と線分の比の定理の証明を考える活動を通して、補助線を引くことで、三角形と比の定理を利用して証明できることに気付き、平行線と比の定理は三角形と比の定理を拡張したものであると捉えることができる。 ・平行な３直線に２直線が交わるときの線分の比について、どのような性質が成り立つと言えそうか帰納的に考察する。 ・補助線を引き、平行線と比の定理が成り立つことを証明する。 ・三角形と比の定理と平行線と線分の比の定理の共通点について考える。	・三角形と比の定理と、平行線と線分の比の定理の共通点を考え、平行線と比の定理は三角形と比の定理を拡張したものであると捉えている姿。（問題解決力）
⑩	◎中点連結定理の証明を考える活動を通して、中点連結定理は三角形と比の定理の特別な場合であることに気付き、その定理について証明したり、定理を利用して図形の性質を証明したりすることができる。 ・中点連結定理が成り立つことを証明をする。 ・中点連結定理を利用して、図形の性質を証明する。	・三角形と比の定理と、中点連結定理の関係について考え、中点連結定理は三角形と比の定理の特別な場合であると捉えている姿。 （問題解決力）
⑪	◎三角形の角の二等分線と比の定理の証明を考える活動を通して、複数の補助線の引き方があることに気付き、既習の図形の性質を用いて三角形の角の二等分線と比の定理を証明することができる。 ・三角形の角の二等分線を引いてできる線分の比について調べ、どのような性質が成り立つと言えそうか考える。 ・補助線を引き、三角形の角の二等分線と比の定理が成り立つことを証明する。 ・さらに他の補助線でも証明できないかを考える。 ・補助線を引いた目的の共通点について考える。	・一つの証明が終わった後も、他の補助線でも証明ができないかを考え、発展的に図形を考察している姿。 ・複数の証明の進め方の共通点を見いだそうと、統合的に考察する姿。 （問題解決力）
⑫	◎平行線と線分の比に着目して三角形の面積比を求める活動を通して、高さが等しい二つの三角形の面積比は、底辺の比に等しいことに気付き、平行線と線分の比の定理を使って面積比を求めることができる。 ・高さが等しい三角形の面積比を求めるためには、図形のどこに着目すればよいのかを考える。 ・平行線と線分の比の定理を利用して面積比を求める。	・面積比を求める方法と根拠について、互いに数学的な表現を用いて筋道立てて伝え合う姿。（関係構築力）
⑬	◎相似な図形の相似比と面積の比との関係を調べる活動を通して、面積の比は相似比の２乗の関係になることに気付き、その理由を説明することができる。 ・相似比が１：３である二つの三角形の面積比を明らかにする。 ・相似比が1:kである二つの三角形の面積比がどのような比で表すことができるかを導き、一般化をはかる。	・相似比が１：３である特別な場合の面積比について考えた後、さらにどんなことが追究できるかを考え、相似な図形の面積比について一般化しようとしている姿。 ・三角形の相似比と面積比の関係から、他の平面図形の相似比と面積比の関係について統合的に考察しようとしている姿。 （問題解決力）

⑭	◎相似な立体の相似比と表面積の比の関係について調べる活動を通して、表面積の比が相似比の２乗になることに気付き、その理由を説明することができる。 ・立体の相似の定義及び相似な立体の性質について知る。 ・相似比が１：２である２つの三角錐の表面積の比を明らかにする。 ・相似比が１：k である２つの三角錐の表面積の比がどのような比で表すことができるかを導き、一般化をはかる。 ・円柱や球など、他の立体においても同様に相似な立体と表面積の比が成り立つことを利用して問題を解決する。	・立体の相似比が１：２である特別な場合の表面積の比について考えた後、さらにどんなことが追究できるかを考え、相似な図形の表面積の比について一般化しようとしている姿。（問題解決力）
⑮	◎相似な立体の相似比と体積の比の関係について調べる活動を通して、体積の比が相似比の３乗になることに気付き、その理由を説明することができる。 ・相似比が１：k である二つの直方体の体積の比がどのような比で表すことができるかを導き、一般化をはかる。	・相似な立体の体積の比の性質について、証明ができているか考察する姿。（問題解決力）
⑯	◎直接測ることが困難な高さを求める活動を通して、相似な図形の性質を求めればよいことに気付き、その考えを利用して２点間の距離や高さを求めることができる。 ・どのように考えれば、測定が困難な２点間の距離を直接測らずに求めることができるかを話し合う。 ・日常の場面から相似な図形を見いだし、相似な図形の性質を利用して数量を求める。	・なかまと数学的な表現を用いて筋道立てて考えを伝え合う姿。 ・数理的な処理のよさを感じ、数学を日常生活や他教科等の学習に積極的に生かそうとしている姿。（貢献する人間性）
⑰	◎直接測ることが困難な２点間の距離を求める活動を通して、相似条件と三角形の決定条件を基に元の図と相似な三角形をかくことで、直接測ることが困難な長さを測ることのできる長さに置き換えて考えられることに気付き、問題を解決することができる。 ・どのように考えれば、測定が困難な２点間の距離を直接測らずに求めることができるかを話し合う。 ・もとの図と相似な図形をかき、実測して求めた長さと相似な図形の性質を利用して実際の数量を求める。	・数理的な処理のよさを感じ、数学を日常生活や他教科等の学習に積極的に生かそうとしている姿。（貢献する人間性）
⑱	◎日常生活や社会の事象における問題について解決する活動を通して、事象を数学的にモデリングすればよいことに気付き、相似な図形の性質を利用して問題を解決することができる。	・日常生活における問題を数学的にどのように捉えたのかを数学的な表現を用いて伝える姿。 ・数理的な処理のよさを感じ、数学を日常生活や他教科等の学習に積極的に生かそうとしている姿。（貢献する人間性）

<table>
<tr><th colspan="2">研究にかかわる見届けの視点と手立て</th></tr>
<tr><td>問題解決力</td><td>○課題解決後にさらに追究できそうなことの見通しをもつ場を設定する。
○系統性を生かし、既習の学習過程を振り返る場を設定する。
○曖昧な部分について問い返し、定義・定理を振り返るように促す。
○発展性や柔軟性を踏まえた教材を開発する。</td></tr>
<tr><td>関係構築力</td><td>○他者と協働できる環境（仲間と論を構築する場等）を整え、考えの異なる仲間との交流を意図的に仕組む。
○根拠が曖昧であれば問い返しながら聞くように促す。</td></tr>
<tr><td>貢献する人間性</td><td>○学んだことだけでなく、自己の解決結果の過程の省察を促し、自己の学び方について認知できる場を設定する
○日常生活や社会の事象の中の数量や数量の関係を数や式を用いるなどの数学化する方法を習得できる機会を意図的・計画的に位置付ける。</td></tr>
</table>

４　教科にかかわる本時のねらい

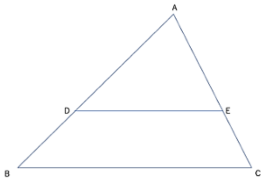
三角形と比の定理②の証明について、どんな補助線を引けばよいかを考える活動を通して、相似な三角形を作るだけでなく、結論を見通しながら補助線を引くことが大事であることに気付き、証明の進め方について考察することができる。〔思考力、判断力、表現力等〕

５　本時の展開（７/18）

生徒の学習活動

１ 前時の授業について振り返る。

・線分の比が等しいことを示すためには、図から相似な三角形を見いだし、相似な図形の性質を利用すればよいことが分かった。



２ 本時の授業課題を共有する。

○前時、帰納的に見いだした図形の性質【AD : DB＝AE : EC】が成り立つことを証明しよう。

【命題】△ABC において、DE//BC ならば AD : DB＝AE : EC である。

◎命題が真であることを証明するときに困ることはないかを問い、前時との違いと問題解決の見通しをもつ。

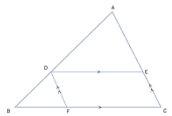
・△ADE と△ABC が相似であることを示しても結論を導くことができない。・結論で述べたい線分を含んだ三角形がない。

→補助線を引いて、相似な三角形をつくればよいのではないか。

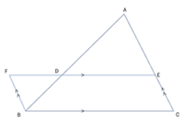
相似な三角形をつくれるような補助線を引けば、証明ができるのか。

３ 命題が真であることを証明する。

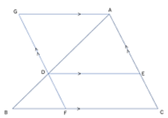
◎どのように補助線を引けばよいかグループで交流し、見通しをもったうえで証明を行う。



【図１】



【図２】



【図３】

◎各グループで代表者１名が、証明を metamoji にアップする。

◎証明ができたら、metamoji にアップされた他の方法の証明を読み、他の補助線を引いた場合についても考える。

◎いくつかの証明を比較しながら、共通点をまとめる。

【図１】
AC に平行で点 D を通る直線を引き、BC との交点を F とする。
△ADE と△DBF において
平行線の同位角より、
∠ADE＝∠DBF・・・①　∠EAD＝∠FDB・・・②
①、②より２組の角がそれぞれ等しいので△ADE∽△DBF
よって AD : DB＝AE : DF・・・①　四角形 DFCE は２組の対辺がそれぞれ平行であるので平行四辺形
平行四辺形の性質より、DF＝EC・・・②
①、②より AD : DB＝AE : EC

４ 考え方の共通点を問うことで、線分の比が等しいことを示すための方法を統合する。

◎考え方の共通点についてグループで交流し、気付いたことを全体で共有する。

・どの場合も、図に示された線分に対して平行な補助線を引いている。　・どの場合も相似な図形の性質を利用している。

・補助線を引くときに、DB や EC を含む三角形をつくっている。　・平行四辺形の性質を利用して辺を動かしている。

５　本時の学びを振り返る。

三角形の比の定理を証明するためには、最初に予想した通り、相似な三角形をつくればよいことが分かった。さらに、補助線をひくときは、どのような図形の性質が使えるようになるかを考えたり、逆思考を働かせて何が言えれば結論が導けるのかを考えたりすることが重要であると分かった。

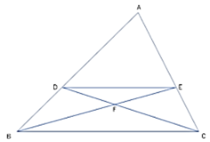
教師の手立てと見届け

○前時に帰納的に見いだした性質を確認することで、活動の見通しをもたせる。

○つまずきになりそうなことを明らかにすることで、「補助線を引いて相似な三角形をつくればよい。」という解決の見通しをもたせる。

○証明ができた生徒には、「他のグループの考えた証明について考えてみよう。」と声をかけ、他のグループの証明を読み、異なる補助線を引いた場合について考えられるようにする。

○線分の比が等しいことを示すためには、意図性をもって相似な三角形をつくらなければならないことに気付かせるために、生徒の追究状況に合わせて【図４】を提示する。△DEF と△CFE のように相似な三角形をつくっても命題が真であると証明ができなかった理由について考えさせることで、比が等しいことを示すためには、その線分を含む三角形が相似であることを示す必要があるということに気付かせる。



【図４】

研究に関わって
【見届けの視点】
自分の考えた証明と、他のグループの証明を比較することを通して、問題を解決するための方法の共通点を見いだし、考えを伝えたりまとめたりしている姿をグループ交流の様子から見届ける。**（問題解決力）**

【評価規準】
三角形と比の定理②が成り立つことを証明するためには、結論を見通しながら補助線を引けばよいことに気付き、証明の進め方について考えをまとめている。［**思考・判断・表現**］